

Per strada

La matematica per i movimenti e i mezzi di trasporto

Scheda 2

Fuori città in bicicletta o in motorino

[0. Introduzione](#)

[1. Le pendenze](#)

[2. Affrontare le salite](#)

[3. Meccanismi che trasformano i movimenti](#)

[4. Esercizi](#)

➔ [Sintesi](#)

0. Introduzione

Nella scheda 1 di *Per strada* abbiamo considerato gli spostamenti in una zona pianeggiante di piccola estensione, comprendente la casa e la scuola di Otto Bus. Abbiamo soffermato la nostra attenzione soprattutto sugli aspetti spaziali (distanze, cambiamenti di posizione, ...), impiegando modelli di tipo geometrico (e algebrico: formule numeriche, ...). Un'analisi più completa avrebbe preso in considerazione anche i tempi di percorrenza, le diversità tra un giorno della settimana e l'altro, ..., e avrebbe comportato l'impiego di ulteriori modelli matematici. Ora esaminiamo una nuova situazione: una gita in bicicletta o in motorino.

1. Le pendenze

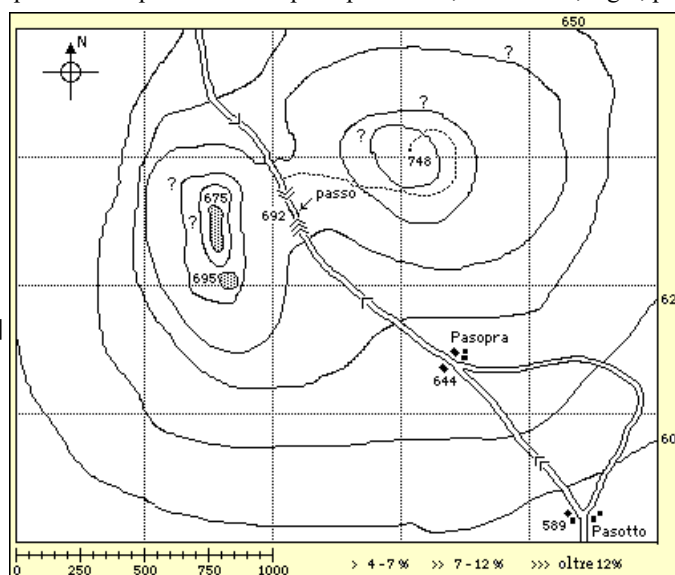
Betta e Rina decidono di fare insieme una gita in campagna, Betta con la sua bicicletta e Rina con il suo motorino.

Vogliono andare in una zona nuova, che non conoscono. Per sceglierla consultano alcune cartine.

Per decidere l'itinerario cercano di tener conto anche del tempo che dovranno impiegare e delle difficoltà del percorso. Quindi prendono in considerazione non solo la lunghezza della strada, ma anche le salite che essa presenta: devono valutare se il ciclomotore di Rina e le gambe di Betta ce la faranno ad affrontarle e devono tener conto che nei tratti in salita l'andatura sarà più lenta che nei tratti in pianura.

Alcune cartine sono del tipo di quella parzialmente raffigurata in *figura 1*, che presenta l'indicazione sia delle curve di livello, sia della pendenza dei tratti di strada più ripidi (oltre a quella delle quote di alcuni posti particolari, come cime, laghi, passi, paesi, ...).

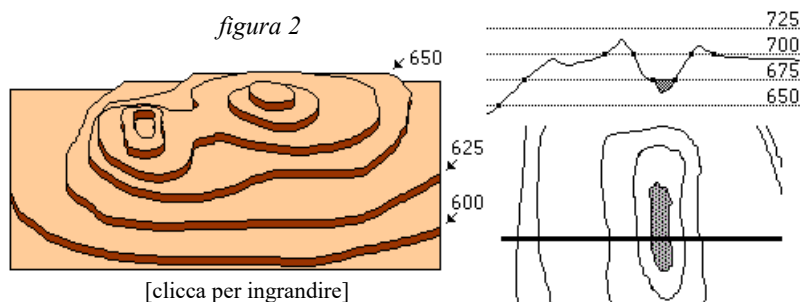
figura 1
[clicca per ingrandire]



Una **curva di livello** (o *isoipsa*, che in greco significa "di uguale altezza") è una linea costituita da punti che rappresentano posizioni della superficie terrestre che sono alla stessa quota sul livello del mare (altitudine). Ad esempio il paesino Pasopra, che è alla quota di 644 m, sta nella striscia compresa tra la curva di livello alla quota 625 m e la curva di livello alla quota 650 m.

Una cartina con curve di livello è un modello cartografico che dà un'idea tridimensionale del territorio. In *figura 2*, a sinistra è raffigurato il plastico che si può ottenere sulla base delle curve di livello della porzione di cartina di fig. 1. Come si vede, si tratta di un plastico a scalini che è solo una approssimazione della forma della superficie terrestre reale. Ad es. la parte piana compresa tra la curva di quota 625 e la curva di quota 650 nella realtà non è piana, ma comprende una superficie che, più o meno gradualmente, passa dalla quota 625 alla quota 650. E non è detto che sia sempre in salita: ad es. la strada dopo Pasopra potrebbe presentare un tratto in discesa per poi risalire fino alla quota 650.

figura 2



[clicca per ingrandire]

Per avere un'idea di come, nella realtà, varia l'altitudine, si veda in *figura 2*, a destra, il profilo del rilievo che sorge a ovest del passo; il profilo è visto secondo una sezione che passa per il laghetto più grande e che è evidenziato nella parte bassa della figura.

- 1 Tenendo conto delle altitudini indicate (e aiutandoti con fig. 2) completa fig. 1 mettendo al posto dei punti interrogativi le quote delle corrispondenti curve di livello.

La carta riprodotta in figura 1 ci dice che, provenendo da sud, l'ultimo tratto di strada prima del passo ha una pendenza che supera i 12% ($>>>$). Dopo c'è una discesa con pendenza tra il 7 e il 12% ($<<$); gli "angolini" sono invertiti, a indicare che si tratta di una salita per chi proviene da nord. Ricordando che la **pendenza** è il rapporto tra variazione verticale e variazione orizzontale, posso dire che nell'ultimo tratto prima del passo ad ogni 100 m di avanzamento orizzontale corrisponde mediamente un aumento di quota superiore ai 12 m; nella discesa immediatamente seguente ad ogni 100 m di avanzamento orizzontale corrisponde un abbassamento compreso tra i 7 e i 12 m. Provo a controllare la prima di queste indicazioni, cioè " $>>>$ ".

Su una striscia di carta ($\rightarrow$ figura 3 a sinistra) faccio due segni per rappresentare la strada dalla quota di 675 m al passo (che è alla quota di 692 m). Disponendo la striscia lungo la scala grafica trovo che il tratto di strada considerato si estende orizzontalmente per circa 125 m. Quindi, poiché il dislivello è di $692 - 675 = 17$ m, ho:

pendenza media = (variaz. verticale) / (variaz. orizzontale) = $17/125 = 0.136 = 13.6\% = [\text{arrotondando}] 14\%$

Ciò è in accordo col segno " $>>>$ ".

[ho arrotondato a due sole cifre; non aveva senso considerare più cifre in quanto sia 17 che 125 sono valori approssimati; ad esempio se il valore esatto del dislivello fosse 17.4000... e quello della strada percorsa orizzontalmente fosse 124.000... avrei ottenuto $17.4/124 = 14.03\%$ invece di 13.6%]

Osservo che aver trovato che la pendenza "media" del tratto considerato è del 14% non significa che in tutto il tratto ad ogni metro di avanzamento orizzontale corrispondono 14 cm di innalzamento: vi possono essere pezzi di strada in cui la pendenza è inferiore e pezzi di strada in cui la pendenza è superiore.

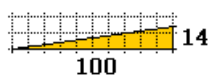
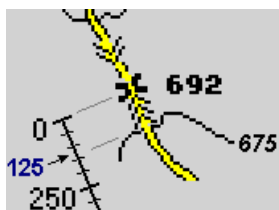
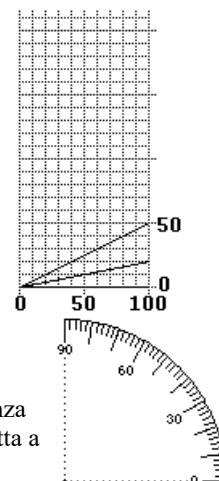
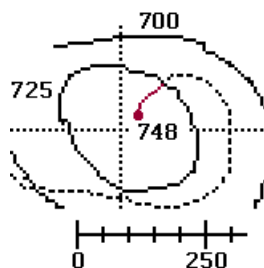


figura 3

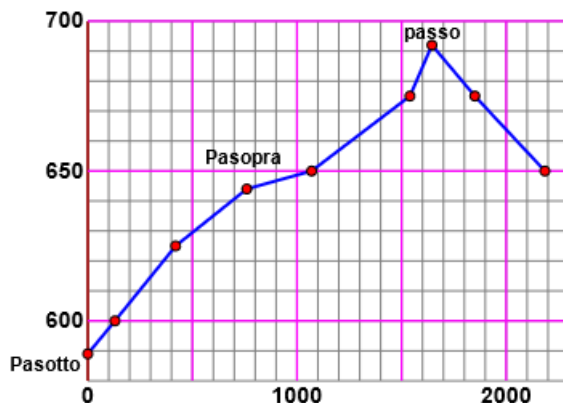


- 2 In prossimità del passo parte un sentiero che conduce alla cima di un monte. Stima quale pendenza si deve affrontare nell'ultimo tratto del sentiero (dalla quota 725 alla vetta: vedi figura sopra, al centro).
- 3 Sopra, a destra, sono raffigurate due salite con le pendenze del 20% e del 50%. Traccia una salita con la pendenza del 100% e una con la pendenza del 200%. Utilizzando un goniometro o la porzione di cerchio graduato riprodotta a destra (più riga e squadra) misura l'angolo di inclinazione di ciascuna di queste due salite.

Betta e Rina hanno imparato facilmente a leggere sia le curve di livello che le indicazioni del tipo " $>>>$ ". Riescono quindi a leggere e confrontare anche le cartine che hanno uno solo dei due tipi di indicazione. Le ragazze hanno anche comprato un libretto in cui sono suggeriti alcuni itinerari per gite in bicicletta; ogni itinerario è rappresentato con una cartina priva di curve di livello e di indicazioni di pendenza, a cui è però accoppiato un **profilo altimetrico** come quello illustrato in figura 4, relativo al tratto di strada che parte da Pasotto: sull'asse orizzontale è indicata la strada percorsa, su quello verticale è indicata l'altitudine (entrambe in metri).

Come si può notare, l'inclinazione del grafico non riproduce fedelmente l'inclinazione della strada. Ad esempio l'ultimo tratto di salita, che ha una pendenza del 14%, è rappresentato più ripido della strada con pendenza del 50% raffigurata nell'illustrazione considerata nel quesito 3. Del resto nessuno di voi ha mai visto strade così inclinate! ($\rightarrow$ figure 6 e 7 della scheda 2 di *La matematica e i suoi modelli*).

figura 4



- 4 Il sistema di riferimento impiegato in figura 4 e quello dell'immagine nella parte destra di figura 3 sono monometrici?

I profili altimetrici non riproducono fedelmente l'angolo di inclinazione di un tratto di strada, cioè l'angolo di cui la strada è ruotata verso l'alto rispetto al piano orizzontale. Del resto neanche l'indicazione numerica della pendenza ci suggerisce immediatamente un'immagine visiva dell'angolo di inclinazione: sappiamo che una pendenza del 100% corrisponde a un'inclinazione di 45° , ma ci è difficile avere un'idea degli angoli corrispondenti a pendenze diverse. Infatti, come abbiamo visto nel quesito 3, non c'è proporzionalità tra angoli di inclinazione e pendenze: al raddoppiare [dimezzare, ...] della pendenza non si raddoppia [dimezza, ...] l'angolo di inclinazione.

Per trovare, ad esempio, l'angolo di inclinazione corrispondente a un tratto di strada lungo 5 m e con un dislivello di 2.5 m possiamo procedere così (→ figura 5):

- fissiamo una retta orizzontale e un punto Q su di essa;
- con un compasso tracciamo un cerchio di centro Q e raggio 5 cm;
- con una riga e una squadra tracciamo una retta parallela alla retta già tracciata e distante 2.5 cm da essa, fino a incontrare il cerchio in un punto P;
- il segmento che congiunge P con Q ha l'inclinazione voluta;
- con un goniometro troviamo che l'angolo di inclinazione è di 30°.

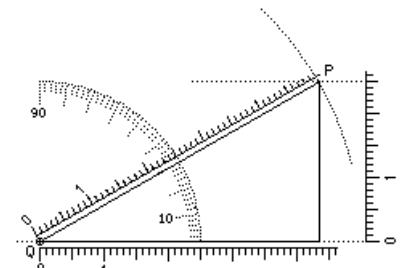


figura 5

5 Come avremmo potuto trovare P senza usare il compasso?

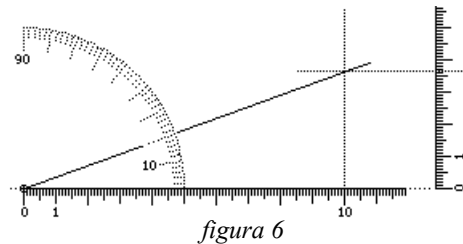


figura 6

Possiamo ricorrere a "metodi grafici" anche per i problemi inversi, ad esempio per trovare la pendenza che corrisponde a un angolo di inclinazione data.

6 Osservando figura 6 stabilisci qual è la pendenza di un tratto di strada inclinato di 20°.

Il goniometro verticale (→ figura 7) permette di misurare l'angolo di inclinazione con cui osserviamo un oggetto. Nel caso raffigurato lo sguardo è inclinato di 20°: per inquadrare la cima della montagna dobbiamo inclinare il tubo di 20°; contemporaneamente il filo a piombo ruota di 20°; sul cerchio graduato attaccato alla tavoletta possiamo leggere questa rotazione.

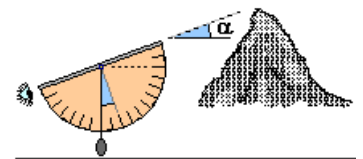
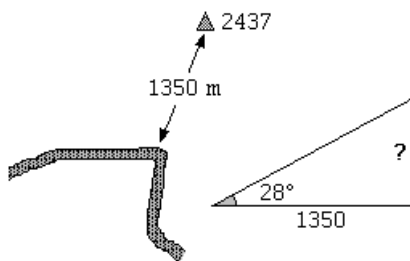


figura 7



7 Sono presso un'ansa di un fiume. Per trovare a che altitudine mi trovo consulto la cartina. Da essa posso dedurre che il monte che posso scorgere è alto 2437 m e, usando la scala, che la distanza in orizzontale tra me e la cima del monte è di circa 1350 m. Utilizzando un piccolo goniometro verticale trovo che l'angolo di inclinazione con cui vedo la cima del monte è di 28°.

Come posso calcolare il dislivello tra noi e la cima del monte e, quindi, la nostra altitudine?

[traccia: utilizza figura 6 per trovare la pendenza del mio sguardo; quindi, da questa e dalla distanza in orizzontale, deduci il valore (arrotondato a 2 cifre) del dislivello in metri].

2. Affrontare le salite

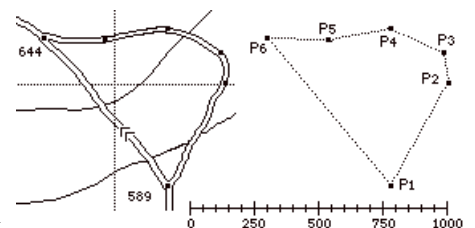
Rina e Betta hanno scelto un itinerario che comprende la strada considerata in figura 1. Meticolose, le due ragazze vogliono programmare ogni dettaglio. Ad es. vogliono valutare se a Betta, con la sua bicicletta, al bivio presso Pasotto convenga prendere la strada a destra o quella a sinistra. Esaminiamo anche noi la situazione.

Innanzitutto confrontiamo l'avanzamento orizzontale lungo le due strade. Le cartine, infatti, riproducono abbastanza fedelmente l'avanzamento orizzontale lungo una strada, non la lunghezza della strada stessa: la superficie terrestre viene "spiacciata" sul piano orizzontale, per cui si perde la dimensione verticale.

[qui, ovviamente, parlando di "orizzontale" e "verticale" non ci riferiamo al foglio di carta ma allo spazio tridimensionale]

Per la strada a sinistra, che è quasi rettilinea, posso procedere come in fig. 3 e trovare che tra i due bivi intercorrono 750 (±10) metri.

La strada a destra presenta varie curve. Per procedere posso approssimarla con una spezzata, cioè con una linea ottenuta concatenando più segmenti. Trovo che è lunga circa 1250 metri..



Riassumendo:

a_1 = avanzamento lungo la strada a sinistra = 750 m a_2 = avanzamento lungo quella a destra = 1250 m

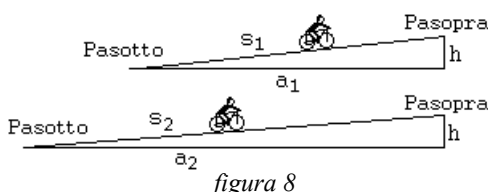


figura 8

In figura 8 sono schematizzate le due strade. s_1 e s_2 sono le loro lunghezze, a_1 e a_2 sono i corrispondenti avanzamenti, h è il dislivello da superare. Le due strade partono da uno stesso punto e arrivano in uno stesso punto: sono due modi differenti per superare il dislivello h .

Voglio capire la diversità delle prestazioni (sforzo, fatica, ...) necessarie per affrontare il dislivello con le due strade.

Esaminiamo la situazione a partire da un esempio più semplice (→ figura 9).

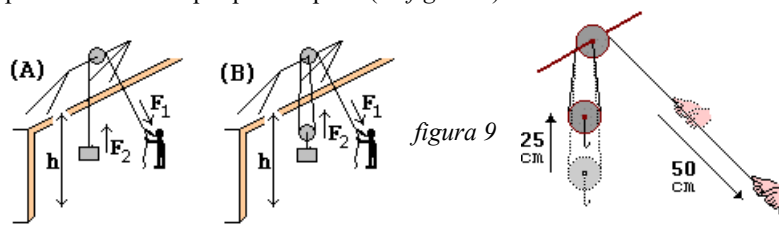


figura 9

In un magazzino le casse vengono sollevate su un soppalco di altezza h a volte con il dispositivo A (una carrucola fissa), a volte con il dispositivo B (taglia o *paranco*, che si ottiene agganciando la fune della carrucola al supporto che la regge e inserendo una rotella dotata di gancio). A destra è illustrato meglio il dispositivo B.

Con A occorre tirare la fune di un tratto h , con B occorre tirarla di un tratto doppio: tirando la fune per 50 cm la rotella mobile si alza di soli 25 cm. Infatti il tratto di fune tirato si distribuisce su due tratti verticali.

In ogni caso, sia col dispositivo A che col dispositivo B, l'effetto è l'innalzamento della cassa di un dislivello h . Se P è il peso della cassa, in fisica questo effetto viene espresso dicendo che: *è stato prodotto un lavoro pari a $P \cdot h$* .

Ad esempio se la cassa pesa 40 kg e il dislivello è di 4 m, il lavoro prodotto per sollevare la cassa sul soppalco è: $40 \cdot 4 = 160$ kgm. Il simbolo *kgm* indica l'unità di misura *chilogrammetro*: è il lavoro per sollevare di 1 m un peso di 1 kg.

Se la cassa pesasse 20 kg il lavoro prodotto sarebbe la metà: $20 \cdot 4 = 80$ kgm. Se la cassa pesasse 60 kg, cioè il 50% in più, anche il lavoro sarebbe il 50% in più, cioè $60 \cdot 4 = 240$ kgm invece di 160 kgm.

Il lavoro varia proporzionalmente anche al dislivello: se il dislivello fosse la metà, cioè 2 m, anche il lavoro sarebbe la metà; infatti $40 \cdot 2 = 80$ kgm.

Il lavoro è stato definito come $P \cdot h$ proprio perché fosse proporzionale sia al peso P che al dislivello h .

Nota. Sto esprimendo le forze in chilogrammi e il lavoro in chilogrammetri, come si fa spesso nelle applicazioni quotidiane. Nelle scienze fisiche, invece, occorre tener conto che il chilogrammo viene usato per misurare le masse degli oggetti: a seconda di dove essi sono collocati (al livello del mare, su un aereo o sulla luna) possono essere attratti verso il centro (della terra o della luna) con una forza maggiore o minore. Si usa, allora, il *Newton*, che corrisponde circa alla forza con cui, al livello del mare, è attratta verso il centro della terra una massa di circa 1 hg, o, in alcune scienze tecniche, il chilogrammo-forza, che è pari alla forza con cui, al livello del mare, è attratta verso il centro della terra una massa di circa 1 kg. Per approfondimenti vedi, in fondo, e18.

8 Gino, per fare uno scherzo a Luisa, la prende sotto alle ascelle e la solleva di circa 50 cm. Enrico, copione, fa lo stesso scherzo a Paola, sollevandola di circa 40 cm. Luisa pesa 54 kg, Paola 62. Quindi Enrico ha sollevato un peso maggiore. Ha anche prodotto più lavoro?

Ritornando al magazzino, posso dire che con entrambi i dispositivi il lavoro prodotto è $P \cdot h$: l'intensità F_2 della forza con cui viene sollevata la cassa è pari al peso P della cassa. I dispositivi non generano autonomamente il lavoro $F_2 \cdot h$, ma trasmettono il lavoro prodotto dall'uomo.

Nel *caso A* l'uomo deve tirare la fune di un tratto h . La forza F_1 che applica viene trasmessa uguale dalla fune, per cui $F_1 = F_2$. Il lavoro prodotto dall'uomo viene trasmesso nella stessa forma (forza di uguale intensità e traiettoria di uguale lunghezza) dal dispositivo.

Nel *caso B* l'uomo deve tirare la fune di un tratto doppio, cioè pari a $h \cdot 2$. Quindi produce un lavoro $F_1 \cdot h \cdot 2$. In uscita dal dispositivo il lavoro assume la forma $F_2 \cdot h$. Da $F_1 \cdot h \cdot 2 = F_2 \cdot h$ ricavo: $F_2 = F_1 \cdot 2$, ovvero: $F_1 = F_2 / 2$.

In modo più espressivo, posso dire che:

il dispositivo B permette di *distribuire il lavoro* da generare su una *traiettoria di lunghezza doppia* per cui viene *dimezzata la forza* da esercitare.

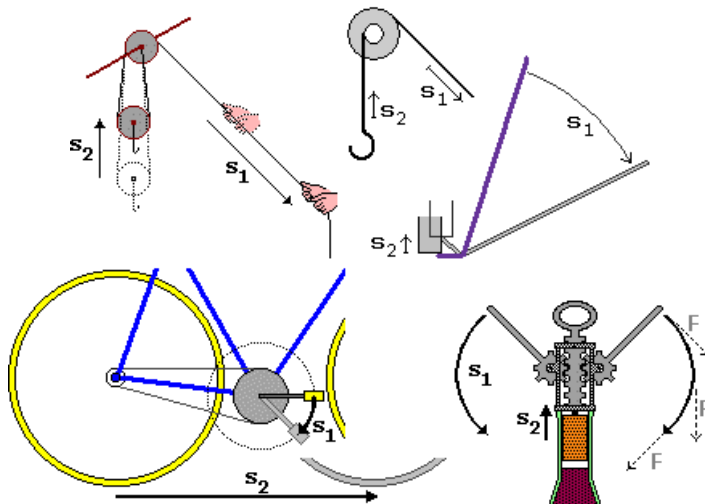
Nota 1. Studiando la situazione "sollevamento casse" abbiamo costruito un *modello fisico* di essa: abbiamo introdotto il concetto di *lavoro* con un significato ristretto rispetto a quello impiegato nel *linguaggio comune*.

Abbiamo fatto anche varie *astrazioni*. Ad esempio abbiamo supposto che l'energia meccanica (lavoro) prodotta dall'uomo venisse trasmessa integralmente dai due dispositivi, mentre in realtà un po' di *energia si disperde* a causa degli attriti (si trasforma in energia termica, cioè in riscaldamento delle rotelle, delle aste attorno a cui ruotano, ...).

C'è senza dubbio un legame tra *fatica* dell'uomo e lavoro che egli produce: se aumentano il peso della cassa o il dislivello aumenta la fatica. Tuttavia l'uomo *consuma più energia dell'energia meccanica che produce*. Ad ee. se a metà del dislivello l'uomo si ferma per riposare un po', in questo frattempo continua a consumare energia, anche se in quantità minore: per tenere stretta la fune deve mantenere i muscoli delle mani e delle braccia in contrazione, per stare in posizione eretta deve agire su altri muscoli, ... e, comunque, deve usare un po' di energia per azionare il cuore, i polmoni,

Analogamente c'è un legame tra *sforzo* che devo fare per sorreggere un oggetto e *forza* che devo applicare. Ma, a parità di peso, a seconda della posizione in cui mi metto faccio uno sforzo maggiore o minore. Infatti il corpo umano è una macchina assai complessa: al variare della posizione, le forze che devono esercitare i vari muscoli cambiano e cambia il modo in cui parte di esse vengono "scaricate" sulle strutture portanti (ossa delle gambe, del tronco, ...).

Nota 2. Generalizzando il caso del sollevamento dei pesi, data una forza di intensità costante F che (trainando o spingendo un oggetto) produce un movimento (man mano diretto come la forza) con traiettoria lunga s , viene chiamato *lavoro* fatto dalla forza il prodotto $F \cdot s$.



Le macchine semplici (→ scheda 1 di *La automazione*) sono macchine che, come il paranco del nostro esempio, trasformano il movimento prodotto dall'operatore in un altro movimento, in modo da cambiare forma al lavoro.

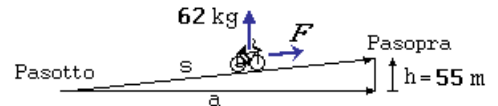
Nel caso del paranco, dell'argano, del piede di porco e del cavatappi, una traiettoria lunga s_1 viene trasformata in una traiettoria di lunghezza s_2 minore, in modo che la forza esercitata viene trasformata in una forza maggiore. Nel caso della bicicletta, invece, alla traiettoria percorsa dal pedale corrisponde una traiettoria percorsa dalla bicicletta che è più lunga: la forza che dobbiamo esercitare sui pedali è maggiore della forza con cui un'altra persona a piedi ci dovrebbe spingere (ma, in cambio, possiamo muoverci più velocemente).

- 9 Dunque il dispositivo B distribuisce il lavoro su una traiettoria più lunga in modo che si deve tirare la fune con una forza minore. Provate a discutere il problema iniziale, cioè a confrontare le difficoltà delle due strade che congiungono Pasotto a Pasopra (→ figura 8).

Determiniamo la forza di spinta F che deve produrre la bicicletta di Betta in funzione della lunghezza della strada s nel caso in cui Betta e bici pesino in tutto 62 kg. Nell'ipotesi irrealistica che la bicicletta possa procedere verticalmente, essa eserciterebbe una forza verticale di 62 kg per un tratto pari al dislivello h . Procedendo per una strada il lavoro viene distribuito su un tratto di lunghezza maggiore, per cui è minore la forza di spinta F da esercitare. Se la lunghezza della strada è s , il fattore di riduzione è h/s :

$$\text{lavoro} = F \cdot s = \text{peso} \cdot h \rightarrow F = \text{peso} \cdot h/s$$

[Nel supporre che $F \cdot s$ sia uguale a $\text{peso} \cdot h$ sto trascurando l'energia che la bicicletta impiega per vincere la resistenza dell'aria, le piccole asperità del terreno, ..., energia che aumenta all'aumentare di s]



Con il teorema di Pitagora posso trovare il valore di s (in metri) relativo alle due strade. Per la più breve ho:

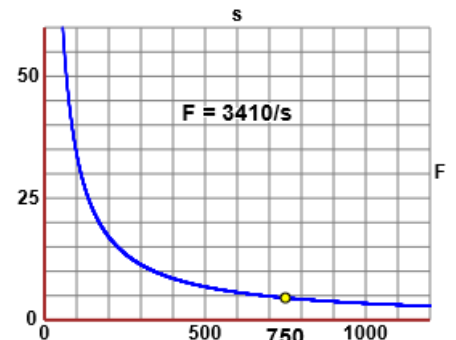
$$s_1 = \sqrt{a_1^2 + h^2} = \sqrt{750^2 + 55^2} = \sqrt{565525} = 752.01... = [\text{arrotondando}] 750$$

[ho arrotondato alle decine di metri in quanto anche a_1 era così arrotondato]

Dunque, con una pendenza come questa ($55/750 = 7.3\%$), l'avanzamento orizzontale e quello lungo la strada sono praticamente indistinguibili: entrambi sono arrotondabili a 750 m. A maggior ragione anche nel caso della strada con minore pendenza ($55/1250 = 4.4\%$) posso confondere a_2 con s_2 e quindi prendere $s_2 = 1250$.

Per trovare la forza di spinta F_1 (in kg) che la bicicletta deve produrre nel caso della strada lunga s_1 posso usare il grafico di F in funzione di s ($F = \text{peso} \cdot h/s = 62 \cdot 55/s = 3410/s$).

Ricavo che in corrispondenza di $s = 750$ si ha F pari circa a 5. Con la formula ottengo: $F_1 = 3410/s_1 = 3410/750 = 4.546... = [\text{arrotondando}] 4.5$.

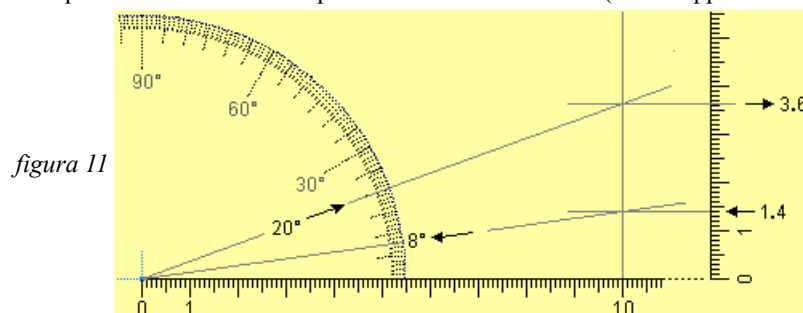


- 10 Calcola il valore F_2 della forza di spinta che la bicicletta deve produrre percorrendo la strada lunga s_2 (arrotonda il risultato a due cifre significative). $F_2 =$

3. Meccanismi che trasformano i movimenti

Riassumiamo quanto abbiamo visto finora:

- Le caratteristiche di una strada in salita possono essere espresse numericamente in due modi:
 - indicando la pendenza, cioè il rapporto tra dislivello superato e corrispondente avanzamento in orizzontale,
 - indicando l'angolo di inclinazione.
- È facile passare dall'uno all'altra e viceversa con metodi grafici (→ figura 11):
 - ad es. posso trovare che a 20° di inclinazione corrisponde la pendenza $3.6/10 = 0.36 = 36\%$ (valore approssimato),
 - viceversa posso trovare che alla pendenza del 14% corrisponde un'inclinazione di 8° (valore approssimato).



- Il lavoro (energia meccanica) che la bicicletta (o un altro mezzo di trasporto) deve produrre per superare la salita è direttamente proporzionale al dislivello.
[ciò vale se trascuriamo l'incidenza della resistenza dell'aria e di altri fattori, che disperdono energia in quantità che dipende anche dalla lunghezza del percorso seguito]

A parità di dislivello h , la forza F di spinta che la bicicletta (o un altro mezzo di trasporto) deve esercitare lungo la direzione della strada è tanto minore quanto più lunga è la strada s : $F = \text{peso} \cdot h/s$.

Nel caso di Betta (→), la forza di spinta della bicicletta lungo le due diverse strade sarebbe:

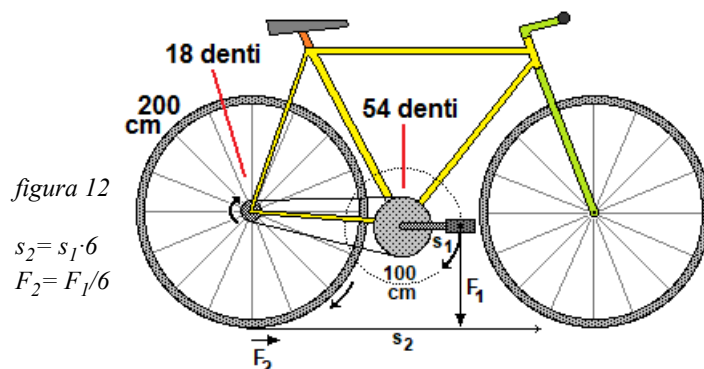
$$s_1 = 750 \text{ m (pendenza } 7.3\%) \quad F_1 = 4.5 \text{ kg}$$

$$s_2 = 1250 \text{ m (pendenza } 4.4\%) \quad F_2 = 2.7 \text{ kg.}$$

- 11 Riferendovi a vostre esperienze, ritenete che tali valori coincidano con la forza che Betta deve esercitare sui pedali o no?

Prima di affrontare con calcoli e con ragionamenti più rigorosi la risoluzione di un problema è bene, in tutti i casi in cui è possibile, cercare di fare una stima intuitiva dei risultati. Ciò può essere utile anche nel guidarci nella risoluzione. In ogni caso, alla fine, è opportuno controllare la sensatezza dei risultati ottenuti. Ad esempio se con un particolare procedimento trovassimo che la forza che Betta deve esercitare sui pedali è di circa 1 kg ciò contraddirebbe le considerazioni affrontate nel quesito 13: la forza da esercitare deve essere dell'ordine di grandezza delle decine di chilogrammi.

La spiegazione del fatto che la forza da esercitare sui pedali è maggiore della forza di spinta effettivamente prodotta è semplice: se il pedale percorre una traiettoria lunga s_1 la bicicletta percorre un tratto di strada s_2 maggiore di s_1 , per cui l'intensità F_2 della forza di spinta generata nel punto di contatto tra ruota posteriore e terreno è inferiore all'intensità F_1 della forza esercitata. Precisiamo quantitativamente queste considerazioni.



In figura 12 è disegnata la bicicletta di Betta:

- la moltiplica ha 54 denti, il triplo dei 18 denti del rocchetto, per cui la ruota posteriore ad ogni pedalata fa 3 giri, cioè ha velocità di rotazione tripla di quella dei pedali;
- una pedalata descrive una traiettoria circolare 100 cm; la circonferenza della ruota posteriore della bici è di 200 cm; la circonferenza della ruota è perciò 2 volte la circonferenza della pedalata.

$$s_1 \xrightarrow{\cdot 3} \xrightarrow{\cdot 2} s_2 = s_1 \cdot 6$$

(1) (2)

- (1) fattore per cui è moltiplicata la velocità di rotazione
(2) rapporto tra la circonf. della ruota e quella della pedalata

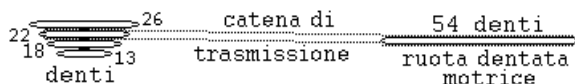
Quindi il lavoro prodotto con una pedalata è distribuito su un traiettoria doppia che viene ripetuta 3 volte, cioè su un percorso che è $2 \cdot 3 = 6$ volte il percorso del pedale. La forza di spinta è perciò 6 volte più piccola della forza esercitata sul pedale. In conclusione:

$$F_2 = F_1 / 6 \quad \text{ovvero:} \quad F_1 = F_2 \cdot 6$$

12 Qual è l'intensità della forza (arrotondata ai kg) che Betta deve esercitare sui pedali nei due casi?
nel caso della strada 1: ... kg nel caso della strada 2: ... kg

Nel caso della strada 1 occorre esercitare una forza di quasi 30 kg, nel caso della strada 2 ne bastano poco più di 15. Se non si vuole fare troppo sforzo conviene decisamente questa strada.

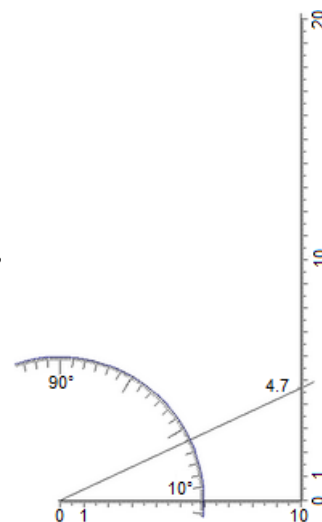
Nel caso la bicicletta sia dotata di **cambio** (➡ scheda 1 di *La automazione*) si può modificare il fattore per cui viene moltiplicata la velocità di rotazione.



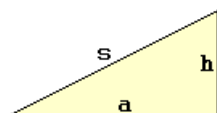
4. Esercizi

e1 Considera la parte centrale della ➡ figura 2. Stima a occhio la pendenza media per passare, provenendo da ovest, dalla quota di 650 m alla quota di 675 m e quella per passare da 675 m a 700 m.

e2 Considera il disegno riprodotto a lato (cliccalo per ingrandirlo).
(a) Spiega perché da esso si può dedurre che un'inclinazione di 25° corrisponde a una pendenza del 47% (valore arrotondato a 2 cifre)
(b) Usando il disegno (e una riga) determina le pendenze che corrispondono a un'inclinazione di 30° , a una di 45° e a una di 60° .
(c) Viceversa, determina gli angoli di inclinazione che corrispondono a una pendenza del 80%, a una del 120% e a una del 160%.



e3 La tabella seguente si riferisce alla figura sotto a sinistra:



a	h	s			
100	0	100	100	50	111.8034
100	5	100.1249	100	55	114.1271
100	10	100.4988	100	60	116.619
100	15	101.1187	100	65	119.2686
100	20	101.9804	100	70	122.0656
100	25	103.0776	100	75	125
100	30	104.4031	100	80	128.0625
100	35	105.9481	100	85	131.244
			100	90	134.5362

100 40 107.7033
100 45 109.6586

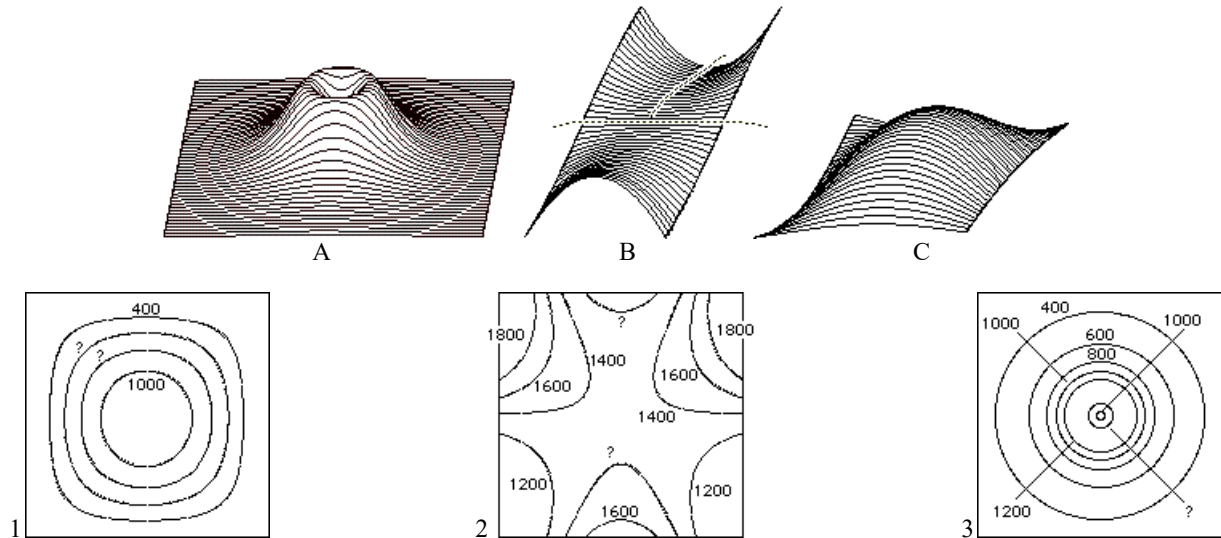
100 95 137.9311
100 100 141.4214

Essa mette in luce che, se la pendenza (h) non è molto alta, avanzamento orizzontale (a) e spostamento lungo la strada (s) differiscono di una quantità molto piccola: si deve arrivare alla pendenza del 15% per avere una variazione percentuale che supera l'1% ($a=100$, $s=101.1\%$).

Se la strada avanza orizzontalmente di 135 m e ha una pendenza è del 20%, usando la tabella sapresti *trovare* quanto differisce dall'avanzamento orizzontale la lunghezza della strada? Se la strada è lunga 120 m e ha una pendenza è del 20%, sapresti *trovare* quanto differisce dall'avanzamento orizzontale?

e4 La tabella precedente può essere ottenuta con l'allegato programma JS [triang](#). Prova a generarla col programma e spiega l'impostazione di esso.

e5 Sotto sono raffigurate tre porzioni (inventate) di superficie terrestre: un vulcano, un valico che mette in comunicazione tre valli (i tratteggi rappresentano sentieri che provengono da esse), una collina. Associa a ciascuna di esse la corrispondente carta delle curve di livello e completa l'indicazione delle quote (l'unità di misura con cui sono indicate è il metro). Motiva le risposte.



e6 Se L è il lavoro prodotto esercitando una forza di intensità di F lungo una traiettoria di lunghezza s , la relazione tra queste tre grandezze è espressa dalla equazione:

$$L = F \cdot s \quad \text{da cui si ricavano} \quad F = L/s \quad \text{e} \quad s = L/F$$

Se in queste equazioni fissiamo il valore di una delle tre variabili, otteniamo delle formule che ci permettono di esprimere le rimanenti due variabili una in funzione dell'altra:

- ad esempio, esprimendo L in kgm, F in kg e s in m, se $F=40$, abbiamo: $L=40 \cdot s$ e $s=L/40$;
- se invece è fissato il lavoro, ad esempio se $L=160$, abbiamo: $F=160/s$ e $s=160/F$.

In un dizionario scientifico, sotto alla voce "proporzionalità", troviamo:

«Date due generiche grandezze x e y , si dice che x e y sono **proporzionali** (o direttamente proporzionali) se esiste un numero costante k ($\neq 0$) tale che $x/y=k$. Si dice che sono **inversamente proporzionali** se esiste un numero costante k ($\neq 0$) tale che $x \cdot y=k$ ».

Completa la seguente tabella (mettendo una crocetta in una delle caselle e completando le frasi a destra).

	Proporzionali	Inversam. proporz.	
fissato F , L e s sono	☐	☐	Al triplicare di s , L ... Al dimezzarsi di s , L ...
fissato s , L e F sono	☐	☐	Al raddoppiare di F , L ... Al dividersi per 3 di F , L ...
fissato L , F e s sono	☐	☐	Al raddoppiare di s , F ... Al dimezzarsi di s , F ...

e7 In alternativa alle definizioni richiamate nel quesito e6 possiamo dire che due grandezze x e y sono **proporzionali** se esiste una costante k ($\neq 0$) tale che, al variare di x e di y , sia sempre vera la condizione: $y=k \cdot x$ e che sono **inversamente proporzionali** se una è proporzionale all'inversa dell'altra, cioè se esiste una costante k ($\neq 0$) tale che, al variare di x e di y , sia sempre vera la condizione: $y=1/x \cdot k$.

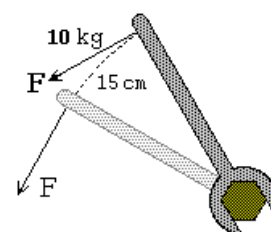
(a) Motiva l'equivalenza tra queste e le precedenti definizioni.

(b) Siano A un disegno e B una sua fotoriduzione di scala fissata. Sia x la distanza tra due punti qualunque di A e sia y la distanza tra i corrispondenti punti di B. x e y sono proporzionali, inversamente proporzionali o nessuna delle due cose? [traccia: indica con k la scala; si ha: $y = \dots$]

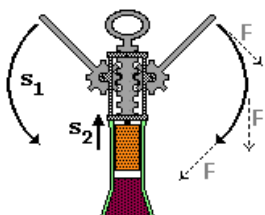
(c) Sia A un disegno e sia B la fotoriduzione di A che si ottiene con una fotocopiatrice con scala di riproduzione variabile. Sia x la lunghezza che aveva in A un particolare che in B diventa lungo 5 cm e sia y la scala di riproduzione. x e y sono ... [come in (b)]? [traccia: indica con k la lunghezza che il particolare assume in B; si ha: $k = \dots$]

(d) Sia A un disegno e sia B una sua fotoriduzione di scala fissata. Sia x l'area che aveva una particolare figura in A e sia y l'area della sua riproduzione in B. x e y sono ... [come in (b)]? [traccia: indica con k la scala; si ha: $y = \dots$]

- e8** Se per allentare un bullone devo applicare sull'impugnatura di una chiave (perpendicolarmente a essa) una forza con intensità di 10 kg e se nel frattempo la mia mano descrive una traiettoria lunga 15 cm, quanto lavoro compio?

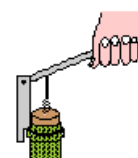


Se faccio la stessa operazione con una chiave con impugnatura di lunghezza doppia, quanto lavoro compio? quanta forza devo applicare?



- e9** Per cavare il tappo nella situazione raffigurata a fianco occorre esercitare sui bracci del cavatappi una forza complessiva di 25 kg. Sapendo che l'arco s_1 descritto dalle mani è lungo 15 cm e che lo spostamento s_2 del tappo è di 3 cm, deduci quanto vale la forza d'attrito tra tappo e bottiglia.

- e10** Considera la figura a lato. Siano F_u l'intensità della forza che esercita verticalmente l'uomo, F_t l'intensità della forza d'attrito prodotta dal tappo contro la bottiglia, D la distanza dal perno del punto in cui fa forza la mano, d la distanza dal perno del punto in cui è incernierata la vite del cavatappi. Ovviamente, d è costante. Per ognuna delle coppie F_u e F_t , F_u e D , F_t e D (supposta fissata la terza grandezza) stabilisci se c'è una relazione di diretta o di inversa proporzionalità. Motiva la risposta.



- e11** Perché i ciclisti affrontando salite molto ripide procedono a zig-zag?

- e12** Nella figura seguente sono illustrati, in scale diverse, tre meccanismi di trasmissione, a ciascuno dei quali, in ordine, sono riferiti i seguenti quesiti. Affrontali.

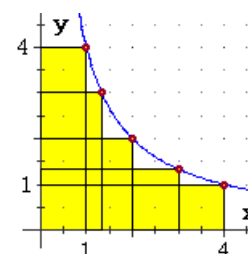
- [diametri **1**) di A doppio di quello di B;
2) di A 3 cm, di B 1 cm;
3) di A 20 cm, di B 10 cm, di C 5 cm]



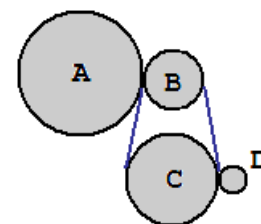
- (1) Se A è la ruota motrice, qual è il rapporto di trasmissione? Quale sarebbe se, invece, la ruota motrice fosse B?
 (2) Nel secondo caso la trasmissione non avviene mediante una catena o una cinghia, ma per contatto diretto. Fissato come positivo il verso antiorario, posso dire che se A ruota a 100 giri/min (verso antiorario), B ruota a -300 giri/min (verso orario). Il rapporto di trasmissione da A a B è quindi -3; qual è, invece, il rapporto di trasmissione da B ad A?
 (3) Nel terzo caso a fianco, qual è il rapporto di trasmissione se A è la ruota motrice e C è la ruota finale? Quale sarebbe se, invece, la ruota motrice fosse C e la ruota finale fosse A? Quale sarebbe se la ruota motrice fosse A e la ruota finale fosse una ruota D a contatto diretto con C e uguale ad essa?

- e13** A fianco sono raffigurati, sovrapposti, alcuni rettangoli di area 4 (se come unità di lunghezza si prende l'unità scelta per gli assi di riferimento) con due lati disposti lungo gli assi di riferimento. Completa, mettendo una opportuna equazione al posto di "...", la seguente descrizione della curva per cui passano i vertici dei rettangoli opposti al punto (0,0).

$$\{(x,y) : \dots \text{ AND } x > 0\}$$



- e14** Considera l'ingranaggio raffigurato a lato. Sotto sono indicate tre funzioni che esprimono la velocità di rotazione (in giri/min) di B, di C e di D in funzione della velocità di rotazione di A. Associa a ogni funzione la ruota finale (B, C o D) corrispondente e tracciane, sul medesimo sistema di riferimento, il grafico. Le ruote A, B, C e D hanno diametro di, rispettivamente, 20, 10, 15 e 5 cm.



$$F: x \rightarrow -2x, \quad G: x \rightarrow 2/3 \cdot F(x), \quad H: x \rightarrow -3 \cdot G(x)$$

- e15** Nella scheda abbiamo usato come unità di misura per la *forza* il **chilogrammo** (kg). Ad essere rigorosi avremmo dovuto chiamarlo *chilogrammo-forza* (kgf) in quanto il chilogrammo è l'unità di misura della *massa*. La massa di un corpo non dipende dalla posizione del corpo mentre il suo peso, cioè la forza che lo attrae verso il centro della terra, diminuisce all'aumentare dell'altitudine. Non è uguale neanche a parità di altitudine: essendo la Terra leggermente schiacciata, e per effetto della forza centrifuga, il peso ai poli è maggiore che all'equatore. In alternativa al kgf si usa, in fisica, il **Newton**, che è la forza che applicata ad un corpo di massa 1 kg gli imprime una accelerazione di 1 m/s^2 . Per esercitarti sull'argomento, vedi lo script [massa-peso](#).

- 1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

curva di livello (dopo fig.1), *profilo altimetrico* (dopo fig.2 e prima di fig.4), *spezzata* (prima di ques.8), *proporzionalità (diretta e inversa)* (ques.e6 ed e7).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: [piccola CT](#) [grande CT](#) [isto](#) [isto con %](#) [boxplot](#) [striscia](#) [100](#) [ordina](#) [Grafici](#) [divisori](#) [Indet](#) [divis](#) [distanza](#) [triang](#)
[massa-peso](#)